DOBLANDO PAPEL APRENDO GEOMETRIA

María de L. Plaza Boscana
Instituto de Verano AFAMaC 2006

14 de junio de 2006

Introducción

- Basándose en los principios de la geometría Euclidiana, y aplicando algunas de las técnicas que aquí se presentaran, es posible crear modelos de algunas de sus proposiciones doblando papel. Esto permite obtener figuras exactas, grabando en las mentes de los jóvenes la veracidad de las proposiciones.

- Doblando papel, en algunas ocasiones podemos realizar diversos procesos geométricos, el único instrumento adicional que requerimos nos los proporcionan los axiomas y postulados de la geometría Euclidiana. Por ejemplo, podemos dividir líneas rectas y ángulos en dos partes iguales, dibujar la perpendicular y la paralela a una línea recta dada.

Actividad 1:Localiza el punto medio de un segmento

- Nivel: Séptimo a Noveno
- Estándar: Geometría
- Estándar de contenido:

  El estudiante es capaz de analizar las propiedades y características de formas geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- Estándar de ejecución:

  Identifica los conceptos punto, recta, plano, segmento, rayo y ángulo con sus características.

- Objetivos:
    1) Hallar el punto medio de un segmento dado.
    2) Construir segmentos congruentes.
- Materiales:
    1) trozos de papel
    2) regla
    3) marcador

- Desarrollo de la actividad:
  1) Dibuja los puntos A y B en cualquier sitio de una hoja de papel.
  2) Une los puntos para formar el segmento AB
  3) Dobla el papel de tal modo que los puntos extremos A y B queden sobrepuestos.
  4) Abre el papel y marca el punto medio de la intersección del segmento AB con el pliegue de la hoja y llámalo C. C es el punto medio de AB.
  5) Utiliza una regla para medir los segmentos AC y CB
  6) Repite esta actividad con otros dos segmentos
  7) Escribe una frase que resuma tus observaciones.

Actividad 2: Relaciones entre ángulos

- Nivel: Séptimo a Noveno
- Estándar: Geometría
- Estándar de contenido:

  El estudiante es capaz de analizar las propiedades y características de formas geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- Estándar de ejecución:

  Identifica los conceptos punto, recta, plano, segmento, rayo y ángulo con sus características.

- Objetivos

    1) Identificar tipos de ángulos.

    2) Clasificarlos de acuerdo a sus medidas y relaciones.

Materiales:

    1) hojas de papel

    2) transportador

Desarrollo de la actividad:

1) Dobla una hoja de papel de tal modo que el doblez la atraviese. Abre el papel, marca el doblez y marca en ella dos puntos A y B.
2) Vuelve a doblar el papel de tal modo que el doblez cruce al primero entre los puntos A y B. Traza este segundo doblez y marca el punto C de la intersección de los dos pliegues, que quede entre D y E.
3) Dobla el papel por tercera vez a través de C de tal modo que el < ACD quede encima del <ECB ¿Qué observas?

Contesta:

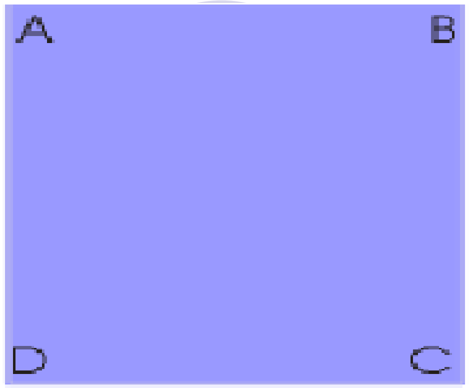
1) Dobla el papel otra vez a través de C de tal modo que el < ACE quede sobre el < DCB ¿qué observas?
2) Con el transportador mide cada ángulo. Escribe las medidas en tu dibujo.
3) Nombra los ángulos opuestos por el vértice en esta actividad.
4) Nombra los pares lineales de esta actividad. ¿Qué puedes decir de sus medidas?
5) Repite esta actividad con otra hoja de papel. ¿Qué puedes decir?

Actividad: El cuadrado

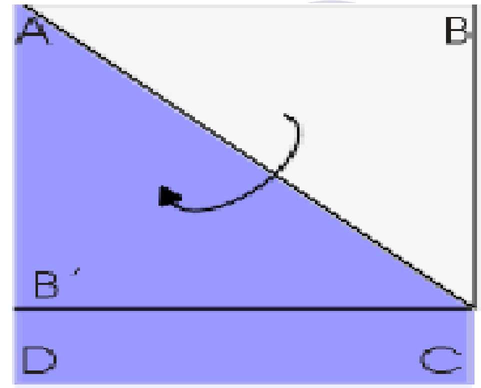
- Podemos utilizar cualquier pedazo de papel, ya sea que tenga o no forma regular, por simplicidad, iniciaremos nuestro trabajo utilizando una hoja de papel rectangular. Para obtener el cuadrado realizaremos el siguiente procedimiento:

- Podemos obtener que los lados de nuestro rectángulo sean iguales, midiendo el lado más corto, digamos A'B'=AB sobre BC, de aquí obtenemos el cuadrado ABCD, es decir, los cuatro ángulos son rectos y los cuatro lados son iguales, además este doblez nos da una diagonal del cuadrado.

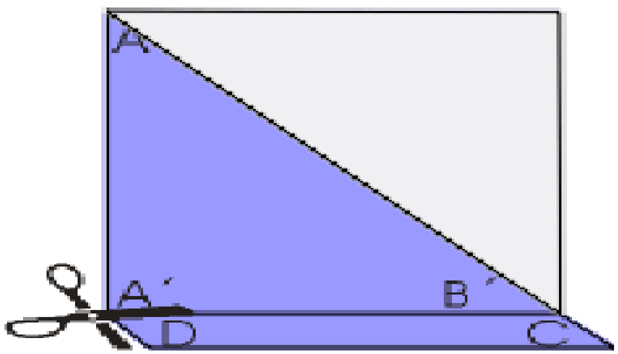
  Veamos ….



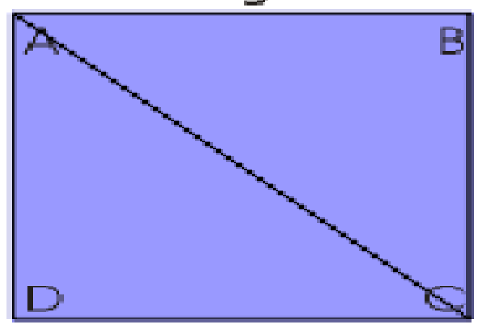
Una vez que tenemos el rectángulo



Doblando nuestra hoja, midamos el lado más corto sobre el más largo



Finalmente, doblemos el lado DC sobre A'B' y eliminemos el pedazo A'B´ C D.



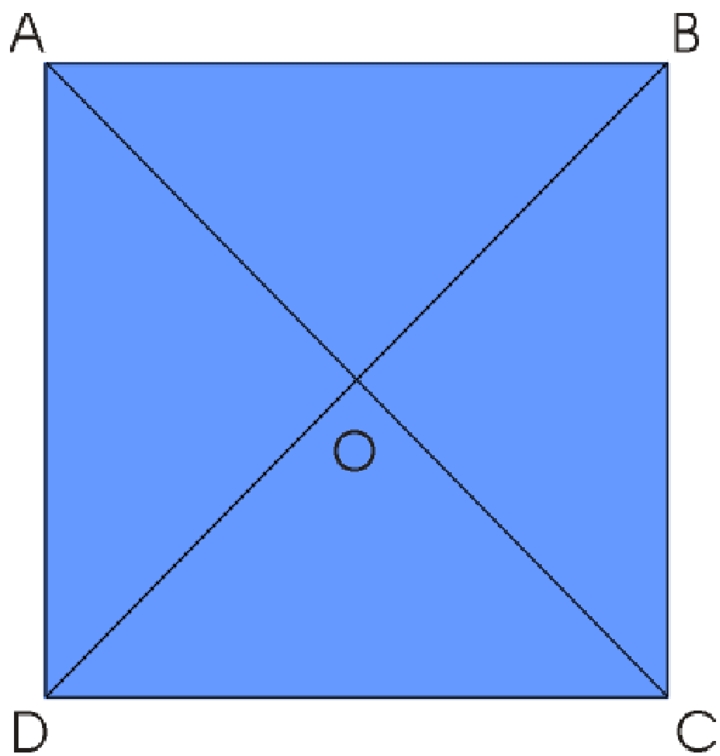
Desdoblando la hoja tenemos un cuadrado, que denotaremos ABCD, y que tiene marcada la diagonal AC.

Analicemos …

- ¿Cómo son los dos triángulos que se forman?
- Solución:

  Cada diagonal divide al cuadrado en dos triángulos isósceles con ángulo recto, cuyos vértices están en esquinas opuestas.

Si superponemos ahora AB sobre AD marcamos la otra diagonal del cuadrado.



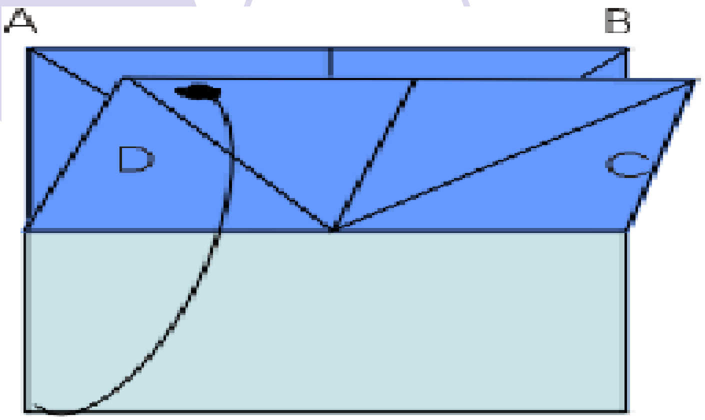
Las diagonales se cortan en el centro del cuadrado.

- Al marcar las dos diagonales el cuadrado queda dividido en cuatro triángulos rectángulos, que a la vez, son isósceles.
- ¿ Qué propiedad tiene el punto de intersección de las diagonales del cuadrado?

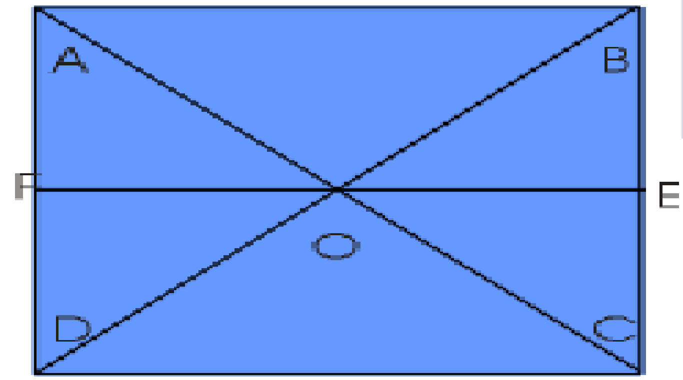
- **Solución: Notamos que las diagonales se intersectan en el centro del cuadrado.**

¿ Qué propiedades tienen en los cuatro triángulos que se forman en el interior del cuadrado, (ej., **D**ABO)?

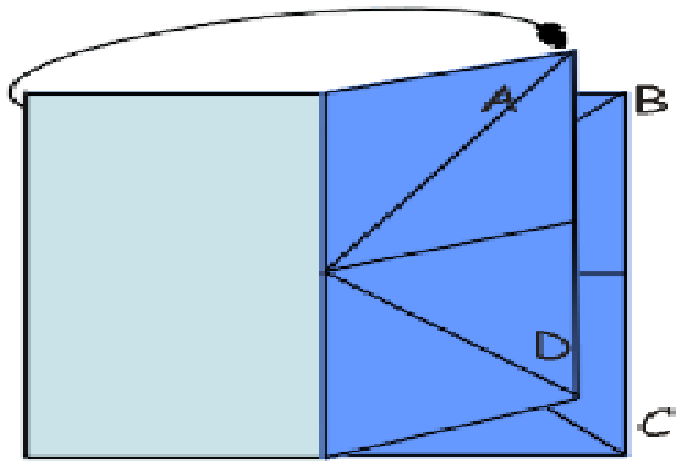
- **Solución: Las dos diagonales dividen el cuadrado en cuatro de estos triángulos congruentes, DABO, DBCO, DCDO y DDAO cuyos vértices están en el centro O del cuadrado.**



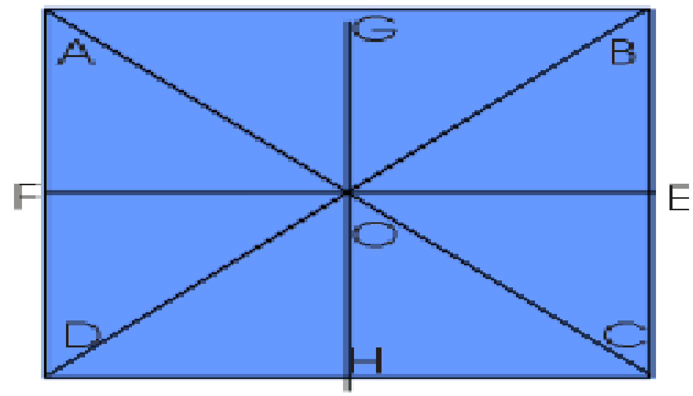
Doblemos el lado AB sobre el lado DC.



La línea EF pasa por O. El área del rectángulo FECD es igual a la del triángulo ADB.



Ahora doblemos el lado AC sobre BD.



El cuadrado queda divido en cuatro cuadrados pequeños

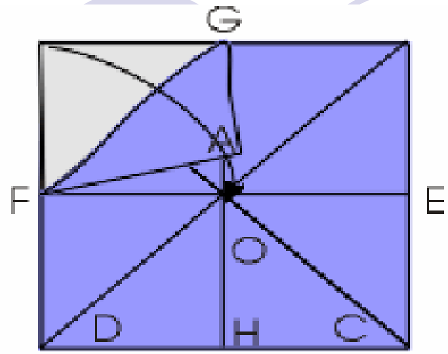
- Doblemos, como muestra la figura anterior, un lado del cuadrado sobre el lado opuesto, (por ejemplo AB sobre DC). Obtenemos así un pliegue que pasa por el centro del cuadrado. Esto divide al cuadrado en dos rectángulos
- ¿Qué propiedades satisface esta línea con respecto a los lados del cuadrado?

- **Solución**: Este nuevo pliegue forma ángulos rectos con los otros lados y:
  - los biseca
  - también es paralelo a los primeros dos lados
  - se bisecan en el centro
  - divide el cuadrado por consiguiente en dos rectángulos congruentes que son, cada uno, la mitad del cuadrado original
  - el área de cada uno de estos rectángulos es igual al área de uno de los triángulos en que cualquier diagonal divide el cuadrado.

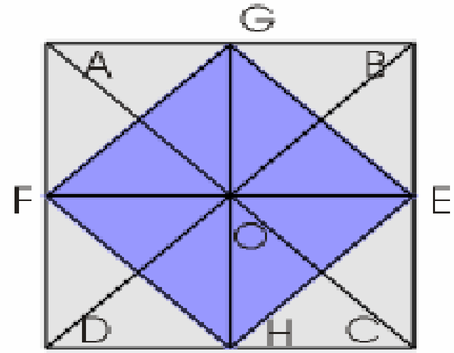
- Si doblamos nuevamente el cuadrado, en forma tal que uno de los lados faltantes se identifique con el lado opuesto, (AD sobre BC), de donde nuestra figura queda dividida en cuatro triángulos congruentes. (por ej. **D**AOB, **D**BOC, etc.)
- Doblando nuevamente sobre las esquinas de los cuadrados pequeños los cuales están en los centros de los lados del cuadrado grande, obtenemos un cuadrado inscrito en el anterior.

¿ Qué relación hay entre el cuadrado original y el que construimos en el párrafo anterior?

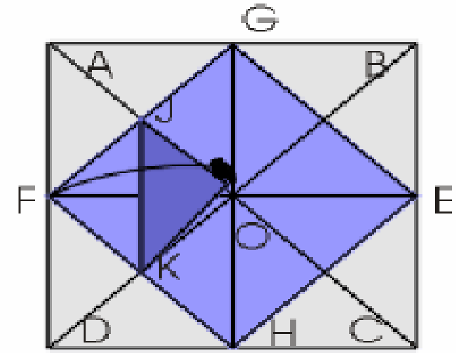
- **Solución: Este cuadrado tiene como área la mitad del cuadrado original, y tiene el mismo centro.**



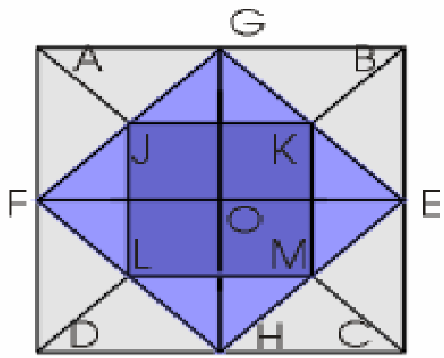
Doblemos las esquinas de los cuadrados pequeños, por ejemplo AG sobre OG, y repetimos el proceso con las 4 vértices.



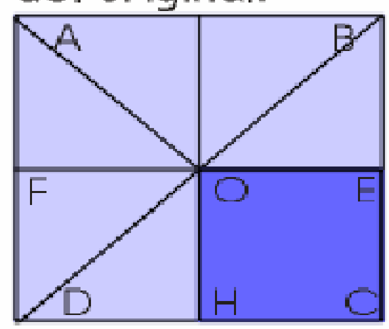
El cuadrado GEHF queda inscrito en el cuadrado ABCD. Su área es la mitad del original.



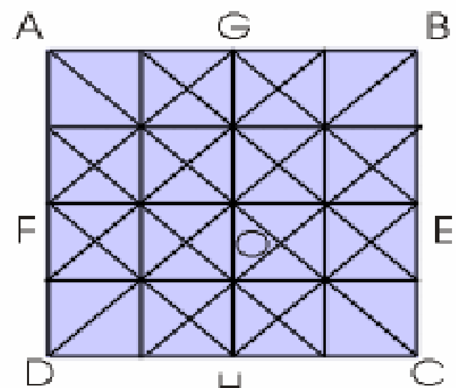
Únanse los puntos medios del cuadrado GFHE, esto lo logramos plegando a lo largo de JK, uniendo F y O.



Repitiendo el proceso con los vértices G, F, H, E tenemos el cuadrado JKLM, cuya área es un cuarto del área de ABCD



El área del cuadrado EOHC es un cuarto del área de ABCD



Aplicamos ahora el proceso anterior a los cuadrados pequeños.

- Únanse los puntos medios de los lados del cuadrado interior, obtenemos un cuadrado JKLM, cuya área es la cuarta parte del cuadrado original, según muestra la figura anterior.
- Repitiendo este proceso obtenemos cualquier número de cuadrados, cuyas áreas son respectivamente la mitad del anterior, esto es

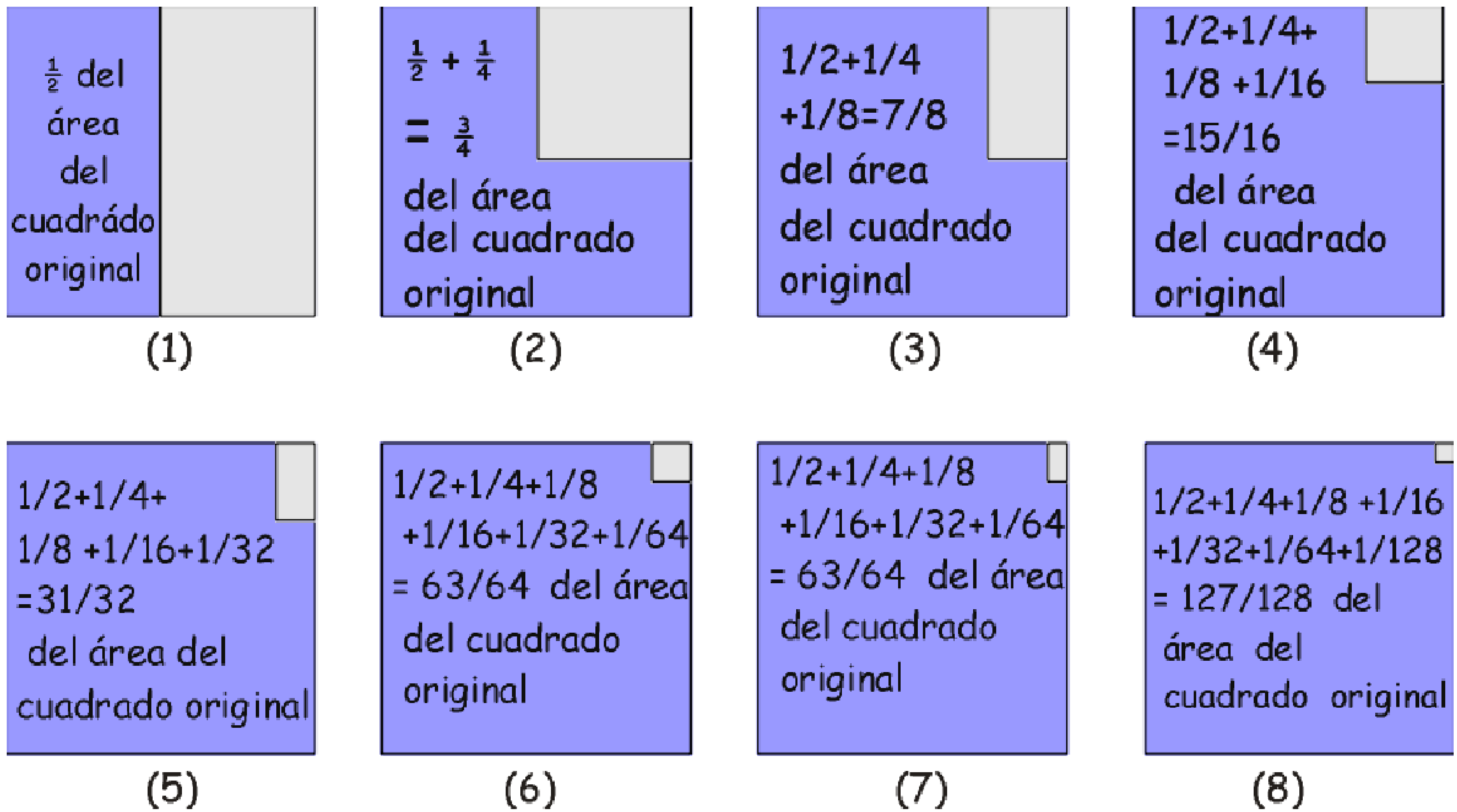
  1/2, 1/4, 1/8, etc.,

Que relación hay entre la suma de las áreas de la familia de cuadrados que se construye siguiendo el proceso anterior?

- **Solución: La suma de las áreas que forman todos los cuadrados que se obtienen al aplicar sucesivamente el proceso anterior, podemos ver se incrementa, pero no puede exceder el área del cuadrado original, pero estas áreas están dadas por**

1/2+1/4+1/8+etc.~ =1

Podemos convencernos de esto por medio de la siguiente figura:



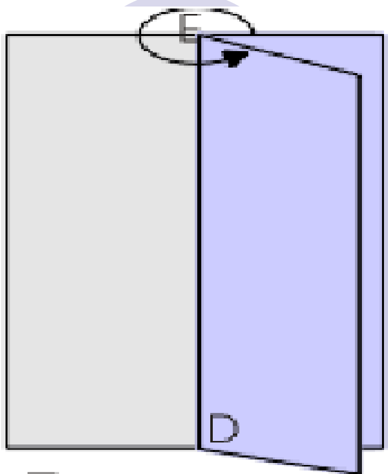
Actividad: El triángulo equilátero

- Para construir el triángulo equilátero seguiremos las siguientes instrucciones:

1) Tomemos ahora un pedazo de papel rectangular, y doblemos el lado más corto, digamos AB por la mitad, superponiendo los lados opuestos, de aquí obtenemos una recta que, por ahora llamaremos ED corta los otros lados en el punto medio.

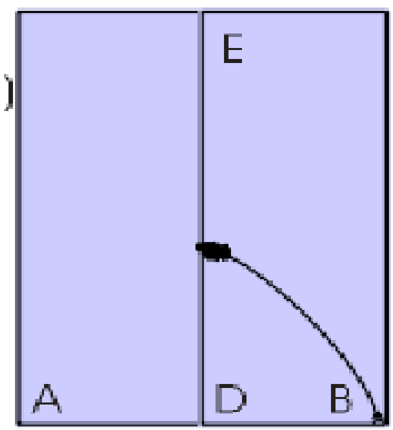
- Si tomamos el punto C sobre la línea ED, en forma tal, que la distancia a las esquinas A y B del rectángulo sea igual a la longitud del lado AB, obtenemos un triángulo equilátero. Llamaremos a este triángulo, el triángulo ABC, como se indica en la siguiente figura:

(1)



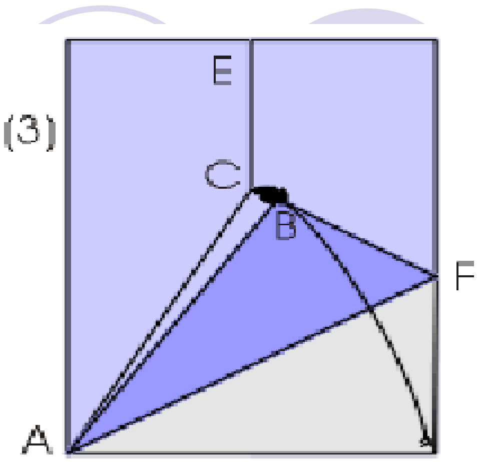
Tomemos una hoja de papel rectangular y doblemos el lado más corto, AB por la mitad.

(2)



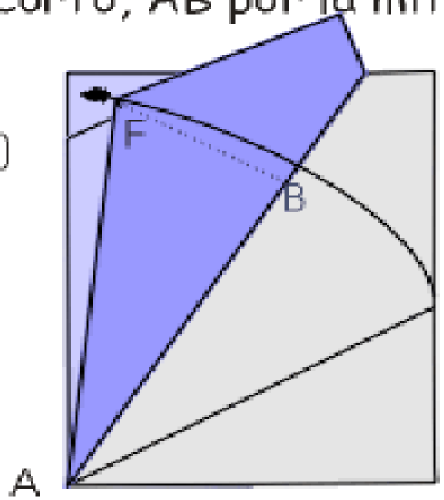
Desdoblemos la hoja, y doblemosla nuevamente haciendo que B quede sobre la línea DE, y dejando fijo A

(3)



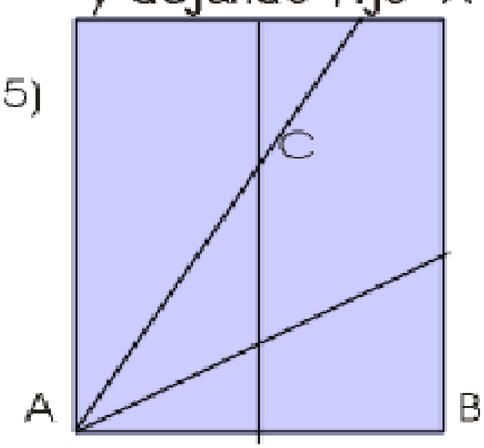
Sobre la línea ED marquemos el punto C, tal que la distancia de AC coincida con AB

(4)



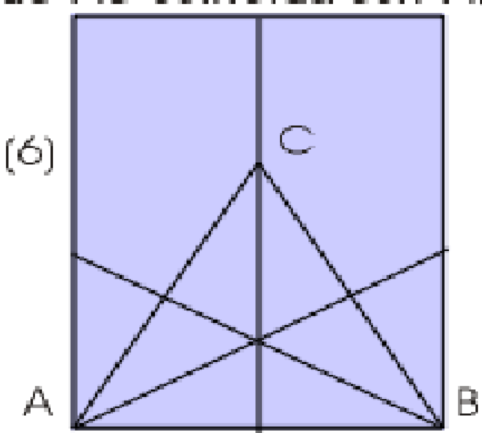
Y doblemos nuevamente sobre AC para marcar ésta línea.

(5)



Nótese que hemos trisecado el ángulo recto con vértice en A.

(6)



Si repetimos este proceso en el vértice B, obtenemos el triángulo equilátero, que llamaremos ABC

Nótese que:

- La línea media divide el triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos congruentes.
- La línea media biseca el ángulo .

Problemas

- Obtenga las medianas del triángulo equilátero DABC, esto es, las líneas que pasan por un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.
  1) ¿ Qué relación hay entre las medianas y los lados del triángulo original?
  2) ¿ Qué relación hay entre las medianas?

Si A',B',C' denotan los puntos medios de los segmentos BC, AC y AB respectivamente, y consideramos el triángulo DA'B'C'

- ¿ Qué relación hay entre sus lados y los lados del triángulo DABC?
- ¿ Qué relación hay entre el área del triángulo DABC y D A'B'C'?
- ¿ Qué otros tipos de configuraciones se pueden encontrar aquí, y qué propiedades satisfacen?

Solución y comentarios

1)El punto medio sobre los lados BC y AC se obtienen fácilmente superponiendo la línea AC sobre AB.

2) Obtenemos de esta forma las tres altitudes del triángulo, AA', BB', CC'.

3) Cada altitud divide el triángulo en dos triángulos rectángulos congruentes.

4) Estas líneas bisecan los lados en ángulos rectos.

5) Las longitudes de los segmentos OA,OB, y OC son iguales, también las longitudes de los segmentos OA', OB', y OC' son iguales.